Filtro de Kalman

- **Modelo do sistema**

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + q(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t) + r(t)
\end{aligned}
$$

  - $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ - Entrada
  - $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ - Saída
  - $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ - Vetor de estado
  - $q(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ - Ruído de estado (ruído branco de média nula com covariância $\boldsymbol{E}\left\{q(t)q(t)^T\right\} = Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$)
  - $r(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ - Ruído de medição (ruído branco de média nula com covariância $\boldsymbol{E}\left\{r(t)r(t)^T\right\} = R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$)
  - $\boldsymbol{E}\left\{q(t)r(t)^T\right\} = S \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$
  - $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ - Matriz de estado
  - $B \in \mathbb{R}^{n_x \times u}$ - Matriz de controlo
  - $C \in \mathbb{R}^{y \times n_x}$ - Matriz de saída
  - $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ - Matriz de alimentação (*feedforward*)

- **Observador de Luenberger**

$$
\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right] \tag{1}
$$

  - $\hat{x}(t)$ - Estimativa do estado
  - $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ - Ganho do observador

- **Filtro de Kalman**

$$
\begin{aligned}
K(t) &= \left[A\tilde{P}(t)C^T + S\right]\left[C\tilde{P}(t)C^T + R\right]^{-1} \\
K_f(t) &= \tilde{P}(t)C^T\left[C\tilde{P}(t)C^T + R\right]^{-1} \\
\hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t) + K_f(t)\left[y(t) - \hat{x}(t) - Du(t)\right] \\
\hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)\left[y(t) - \hat{x}(t) - Du(t)\right] \\
\tilde{P}(t+1) &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - \left[A\tilde{P}(t)C^T + S\right]\left[C\tilde{P}(t)C^T + R\right]^{-1}\left[A\tilde{P}(t)C^T + S\right]^T
\end{aligned}
$$

  - $\hat{x}(t|t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ - Estimativa de $x(t)$ no instante t
  - $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ - Previsão (prognóstico) de $x(t)$ no instante $t-1$.
  - $K(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ - Ganho do previsor de Kalman
  - $K_f(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ - Ganho do filtro de Kalman
  - $\tilde{P}(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ - Covariância do erro da previsão: $\tilde{P}(t) = \boldsymbol{E}\left\{\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T\right\}$ em que $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

- Covariância do erro $\tilde{x}(t|t) = x(t) - \hat{x}(t|t)$ do filtro de Kalman

$$
\tilde{P}(t|t) = \boldsymbol{E}\left\{\tilde{x}(t|t)\tilde{x}(t|)^T\right\} = \tilde{P} - \tilde{P}C^T\left[C\tilde{P}C^T + R\right]^{-1}C\tilde{P}(t)
$$

- **Filtro de Kalman com $S = 0$ (ruídos de estado e de medição independentes)**

$$\begin{aligned}
K_f(t) &= \tilde{P}(t)C^T\left[C\tilde{P}(t)C^T + R\right]^{-1} \\
\hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t) + K_f(t)\left[y(t) - \hat{x}(t) - Du(t)\right] \\
\hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t|t) + Bu(t) \\
\tilde{P}(t+1) &= A\tilde{P}(t)A^T + Q - A\tilde{P}(t)C^T\left[C\tilde{P}(t)C^T + R\right]^{-1} C\tilde{P}(t)A^T
\end{aligned}$$

Periodograma

- **Janela triangular de Bartlett de largura $2L+1$**

$$\begin{aligned}
w_B[n] &= \begin{cases} \dfrac{L-|n|}{N}, & |n| \le L \\ 0, & |n| > L \end{cases} \\
W_B(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\left\{w_B[n]\right\} = \frac{1}{L}\left[\frac{\mathrm{sen}(L\omega/2)}{\mathrm{sen}(\omega/2)}\right]^2 \\
\int_{\omega=0}^{2\pi} W_B(e^{j\omega})d\omega &= 2\pi L
\end{aligned}$$

- **Propriedades da Transformada de Fourier**
  - Convolução

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

$$x[n]y[n] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} X(e^{j\phi})Y(e^{j(\phi-\omega)})d\phi$$

  - Atraso

$$x[n-n_0] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$e^{j(\omega_0 n)}x[n] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(e^{j(\omega\omega_0)})$$

- **Transformadas de Fourier úteis**

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\delta[n]\right\} &= 1 \\
\mathcal{F}\left\{C\right\} &= 2\pi\delta(\omega) \\
\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} &= 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\
\mathcal{F}\left\{\cos(\omega_0 n)\right\} &= \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right] \\
\mathcal{F}\left\{\mathrm{sen}(\omega_0 n)\right\} &= \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}$$