MESTRADO EM ENGENHARIA FÍSICA
EEC4002 - Processamento Estatístico de Sinal
Primeira Chamada 2^a parte

1. Considere o seguinte sistema com entrada $u(t) \in \mathbb{R}$ e saída $y(t) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 0.8x(t) + u(t) \\ y(t) &= 0.5x(t) \end{aligned}$$

a) Dimensione um observador de Luenberger com valor próprio $\lambda = 0,7$.

b) Suponha que o estado $y(t)$ sofre uma perturbação em degrau, isto é, que

$$y(t) = 0.5x(t) + r(t)$$

em que $r(t)$ é um degrau no instante $t_0 > 0$. Dimensione um observador que consiga estimar $x(t)$ e $r(t)$ (utilize valores próprios iguais a 0,7).

2- Considere o sistema

$$x(t+1) = x(t) + q(t) \tag{1}$$
$$y(t) = y(t) + r(t) \tag{2}$$

em que $q(t)$ e $r(t)$ são ruído branco de média nula com variâncias Q e R, respetivamente. Sabendo que $q(t)$ e $r(t)$ são independentes,

a) Mostre que o ganho previsor de Kalman estacionário é

$$K = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\eta}}{1 + \sqrt{1 + 4\eta} + 2\eta}$$

em que

$$\eta = \frac{R}{Q}.$$

b) Mostre que os ganhos do filtro e do previsor de Kalaman são iguais.

3. Seja $x[n] = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{20}n\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{50}n\right)$.

a) Mostre que a sequência de auto-covariância de $x[n]$ é

$$\lambda_{xx}(k) = \frac{A_1^2}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{20}k\right) + \frac{A_2^2}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{50}k\right)$$

b) Determine $P_{xx}(\omega)$, a densidade espetral de $x[n]$.

c) Determine o valor esperado do periodograma de $x[n]$ calculado a partir de um registo de L pontos.

d) Determine os valores de L que garantem que os lobos principais dos periodogramas dos sinais $x_1[n] = 10\cos\left(\frac{2\pi}{20}n + \theta_1\right)$ e $x_2[n] = 5\cos\left(\frac{2\pi}{50}n + \theta_2\right)$ não se sobrepõem.