Sumário

- *Cálculo da Convolução Linear através da Convolução Circular*

  – *motivação*

  – *relação entre convolução linear e convolução circular*
    - *a convolução linear entre duas sequências finitas*
    - *condição para a identidade entre a convolução linear e a circular*

  – *realização da convolução linear usando DFTs*
    - *motivação*
    - *convolução entre duas sequências de comprimento finito*
    - *caso em que uma das sequências é de comprimento infinito*
      – *o algoritmo "overlap-add"*
      – *o algoritmo "overlap-save"*

© AJF

Convolução Linear através da Convolução Circular

- Motivação
  - a caracterização de um sinal por amostras, quer em n (o que é possível pela amostragem de um sinal contínuo de banda limitada), quer na frequência (o que é possível pela amostragem da transformada de Fourier de um sinal discreto de comprimento limitado), é desejável do ponto de vista computacional (porquê ?),
  - há algoritmos rápidos (FFT, como já visto), que calculam a DFT de forma eficiente,
  - há um grande número de aplicações de processamento digital de sinal que recorre à convolução linear (*e.g.,* na codificação de voz operada nos telefones celulares),
  - sendo $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências discretas finitas e $X_1[k]$ e $X_2[k]$ a sua DFT (com o mesmo comprimento !), o produto $X_1[k]X_2[k]$ é computacionalmente fácil de avaliar, correspondendo à convolução circular de $x_1[n]$ com $x_2[n]$, e tem um interesse prático enorme já que (como ilustrado na aula anterior) é possível proceder de forma que a convolução circular produza o mesmo resultado que a convolução linear.

© AJF

Relação entre Convolução Linear e Convolução Circular

- Os exemplos vistos na aula anterior revelam que é possível obter para a convolução circular, um resultado idêntico ao que seria obtido pela convolução linear. Importa pois esclarecer em que condições tal se verifica.

- Convolução Linear entre duas sequências finitas
  - sejam as sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ de comprimento L e P, respectivamente, que sem perda de generalidade, admitimos serem causais:

$$\left.\begin{matrix} \boxed{x_1[n]} \\ \boxed{x_2[n]} \end{matrix}\right\} \overset{Z}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \boxed{X_1(z)=\sum_{n=0}^{L-1} x_1[n]Z^{-n}} \\ \boxed{X_2(z)=\sum_{n=0}^{P-1} x_2[n]Z^{-n}} \end{matrix}\right.$$

será então para a sua convolução linear:

$$\boxed{x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]} \overset{Z}{\longleftrightarrow} \boxed{X_3(z)=X_1(z)\cdot X_2(z)=\sum_{\ell=0}^{L+P-2} x_3[\ell]Z^{-\ell}}$$

$\rightarrow$ o que traduz uma conclusão já conhecida: **o comprimento máximo** da sequência $x_3[n]$ é: **L+P-1**.

© AJF

Relação entre Convolução Linear e Convolução Circular

Questão: sendo $x_1[n]$ uma sequência finita de comprimento L, e $x_2[n]$ uma outra sequência finita de comprimento P, como se compara o resultado da convolução linear $x_3[n]=x_1[n]*x_2[n]$ com o da convolução circular $x_{3p}[n]=x_1[n]\otimes x_2[n]$?

- Convolução Linear

$$\boxed{x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})}$$

o comprimento da sequência $x_3[n]$ é, como vimos, L+P-1.

- Convolução Circular

supondo agora que se acrescenta um número adequado de amostras nulas à sequência mais curta, formamos a partir de $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências periódicas de comprimento N [**N ≥ MAX(L, P)**], resultando a seguinte análise:

$$\boxed{X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k] = X_1\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right).X_2\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right), \quad 0 \le k \le N-1}$$

© AJF

Condição para Identidade entre Conv. Linear e a Circular

→ Pela relação de Fourier, esta análise corresponde à convolução circular entre as duas sequências periódicas: $x_3[(n)_N] = x_1[(n)_N] \otimes x_2[(n)_N]$ mas sabe-se também que:

$$X_3[(k)_N] = X_3\left(e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right) \quad \overset{\mathbf{F}}{\longleftrightarrow} \quad x_3[(n)_N] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3[n-\ell N]$$

pelo que se conclui que o resultado da convolução circular pode ser expresso em função do resultado da convolução linear:

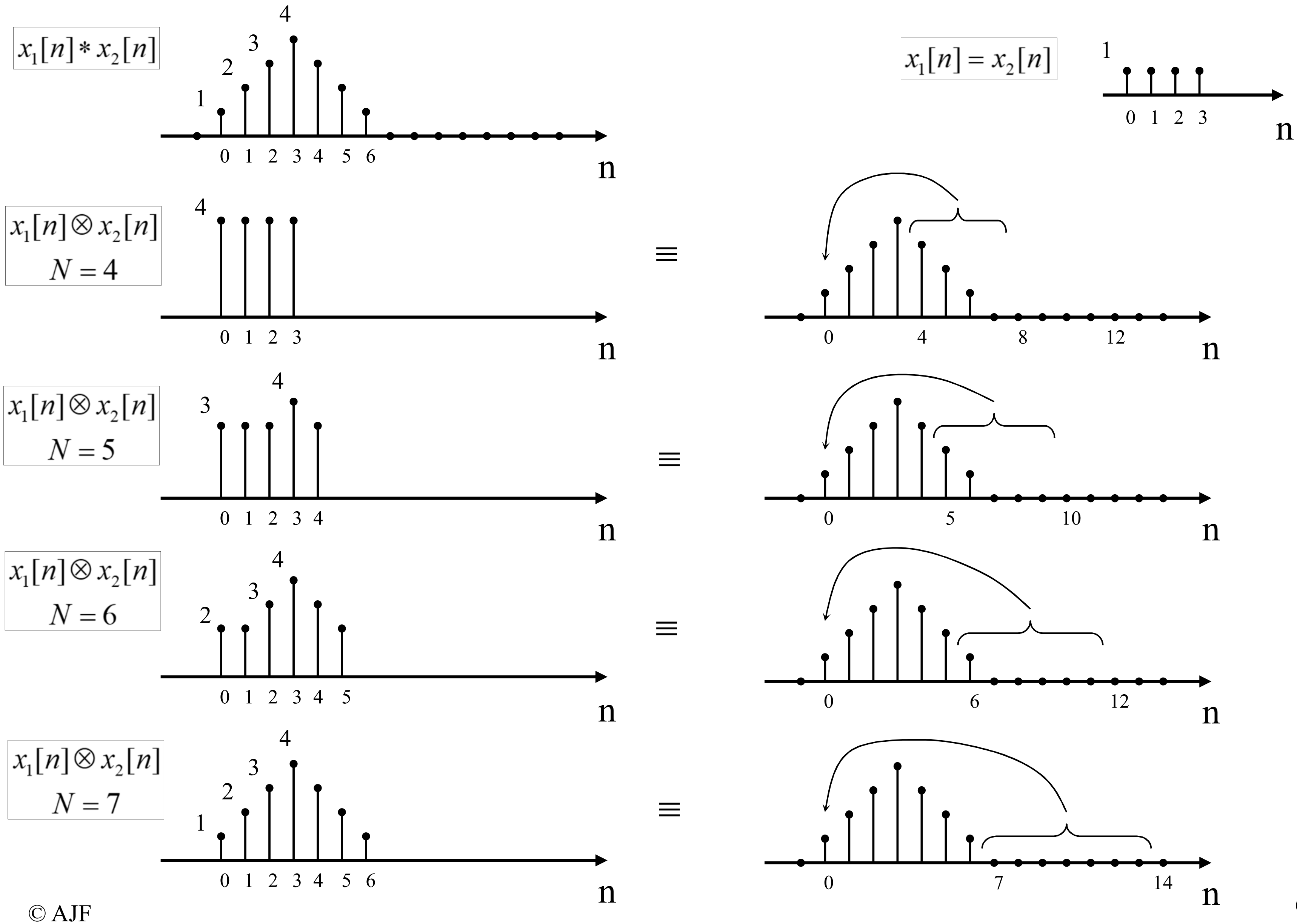
$$x_{3_p}[n] = \begin{cases} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x_3[n-\ell N], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & outros \quad n \end{cases} = \begin{cases} x_3[n] + \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ \ell \neq 0}}^{+\infty} x_3[n-\ell N], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & outros \quad n \end{cases}$$

Concretamente, o resultado da convolução circular é igual ao resultado da convolução linear mais um número infinito de termos de "aliasing" em n (os correspondentes a $\ell \neq 0$ no somatório anterior), também designado de "aliasing" temporal.

→ resulta assim claro que o **resultado da convolução circular** só será **igual** ao da **convolução linear** se os termos de 'aliasing' forem nulos para $0 \le n \le N-1$, o que só se verifica se <u>N igualar ou exceder o comprimento de $x_3[n]$</u> , ou seja, se **N ≥ L+P-1.**

© AJF

Exemplo: sendo $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências unitárias de comprimento 4, ilustram-se os resultados da convolução linear e também circular para N entre 4 e 7. Em cada caso identifica-se o efeito de ‘aliasing’ associado.



© AJF

Condição para Identidade entre Conv. Linear e a Circular

$\rightarrow$ Conclui-se deste exemplo que o ‘aliasing’ resultante da convolução circular consiste em enrolar o resultado da convolução linear sobre si próprio.

© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Motivação

  → A convolução linear entre duas sequências finitas pode ser calculada através da convolução circular, usando DFTs com comprimento apropriado,

  → Usando algoritmos rápidos para o cálculo da DFT (já estudados nas aulas anteriores) pode ser mais eficiente calcular a convolução usando DFTs do que efectuar o cálculo directo da convolução em n (isto é aplicável mesmo a filtros FIR com resposta impulsional tão curta quanto com cerca de 30 coeficientes),

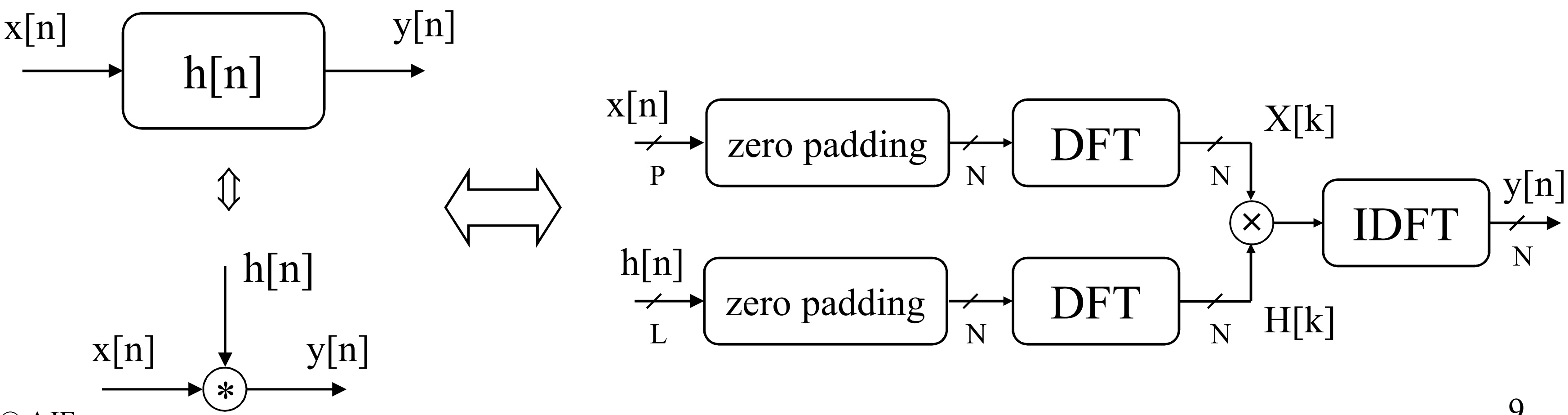
  → A convolução linear entre uma sequência finita (*e.g.,* a resposta impulsional de um sistema FIR) e uma outra infinita (*e.g.,* um sinal de fala à entrada de um filtro FIR), pode ser também realizada usando DFTs, mas efectuando os cálculos por blocos que resultam de uma segmentação adequada da sequência de comprimento infinito,

  → Simultaneamente com o cálculo da convolução linear usando DFTs, pode ser realizada uma estimação espectral servindo algum objectivo de análise dos sinais que intervêm na convolução linear.

© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Convolução linear entre duas sequências de comprimento finito
  - sendo h[n] de comprimento L, e x[n] de comprimento P, a sua convolução linear produz um sinal y[n] de comprimento L+P-1,
  - realizando a convolução linear através de DFTs, os sinais h[n] e x[n] deverão ser previamente aumentados com amostras nulas até atingirem o comprimento mínimo de N=L+P-1, este processo é designado na gíria por "zero padding",
  - na condição de N≥L+P-1, a seguinte equivalência de sistemas pode ser estabelecida:



© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Convolução linear entre sequência finita e outra sequência infinita

  – sendo h[n] de comprimento L, e x[n] uma sequência de comprimento indeterminado, pode-se usar repetidamente a técnica anterior efectuando uma segmentação em blocos finitos de comprimento P do sinal x[n], e tirando partido da propriedade da linearidade da convolução:

    - efectua-se em primeiro lugar a convolução respeitante a cada bloco (isto é, com base em pequenas secções do sinal),
    - combinam-se depois os resultados das várias convoluções de bloco para produzir a saída desejada.

  – usando esta técnica, há basicamente dois tipos de procedimento para a segmentação (isto é, de seccionamento) do sinal de comprimento infinito e a combinação dos resultados de cada convolução de bloco:

    - algoritmo de "overlap-add",
    - algoritmo de "overlap-save".

© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Algoritmo de *overlap-add*

  – em primeiro lugar, segmenta-se o sinal x[n] em blocos contíguos $x_b[n]$ de comprimento P amostras, de modo que:

$$x[n] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} x_b[n-bP]$$

com: $$x_b[n] = \begin{cases} x[n+bP], & 0 \le n \le P-1 \\ 0, & outros \quad n \end{cases}$$

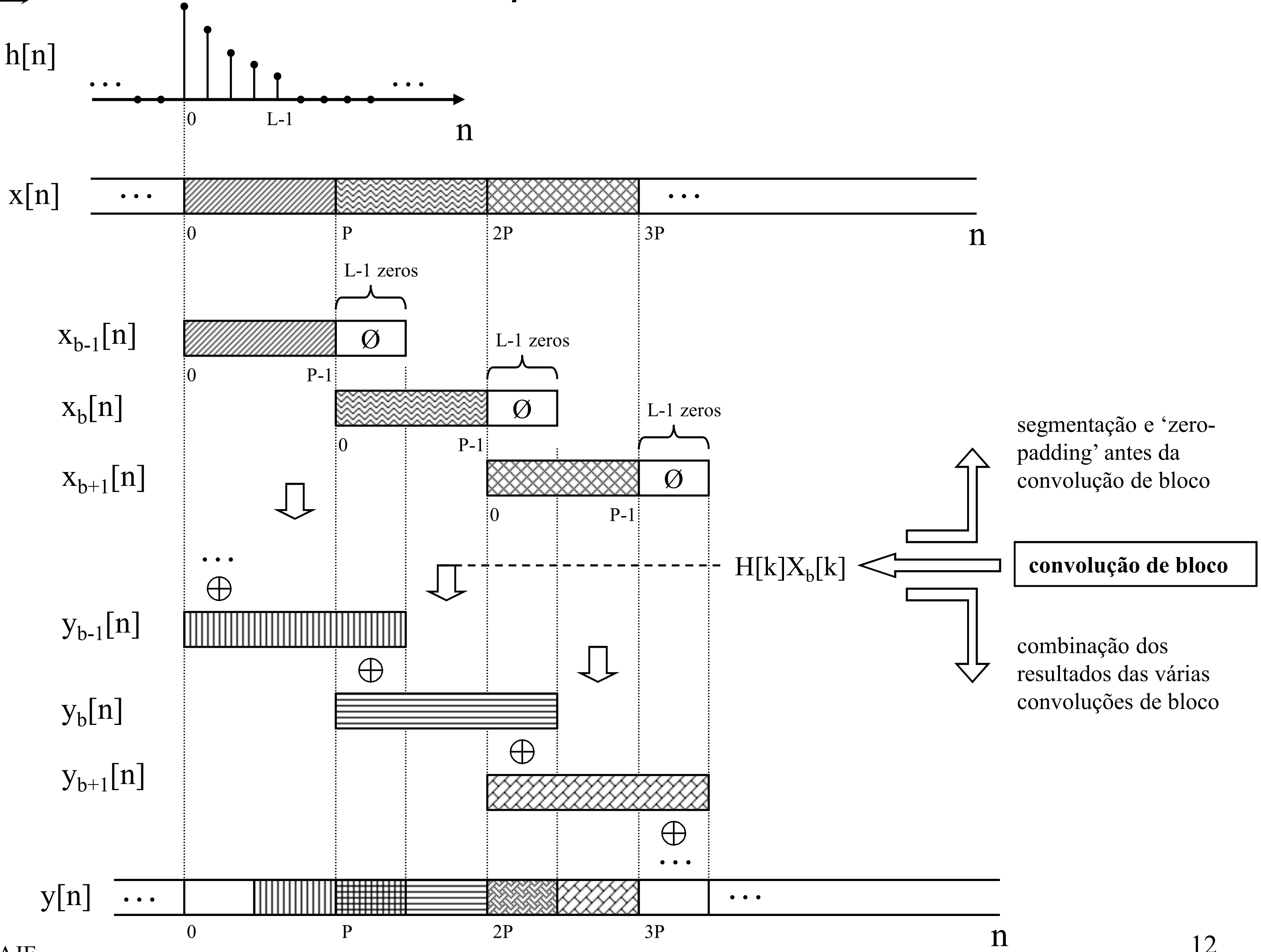
a saída pretendida é: $$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * \sum_{b=-\infty}^{+\infty} x_b[n-bP] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} y_b[n-bP]$$

com: $$y_b[n] = h[n] * x_b[n]$$

→ sendo $y_b[n]$ a convolução linear do bloco de índice b que, como já vimos, pode ser calculada usando DFTs de comprimento N ≥ L+P-1.

© AJF

Overlap-Add com N=L+P-1



© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Particularidades do algoritmo *overlap-add*

  – dado que os blocos são de comprimento P amostras mas o resultado de cada convolução de bloco é de comprimento L+P-1 amostras, ao combinar os vários resultados para produzir y[n], deve-se sobrepor e somar ("overlap-and-add") os resultados adjacentes em L-1 amostras (que em princípio são não-nulas),

  – se o sinal x[n] tiver um comprimento total que seja um inteiro múltiplo de P amostras, então, para produzir o resultado final desejado, é suficiente efectuar esse número inteiro de convoluções de bloco.

© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

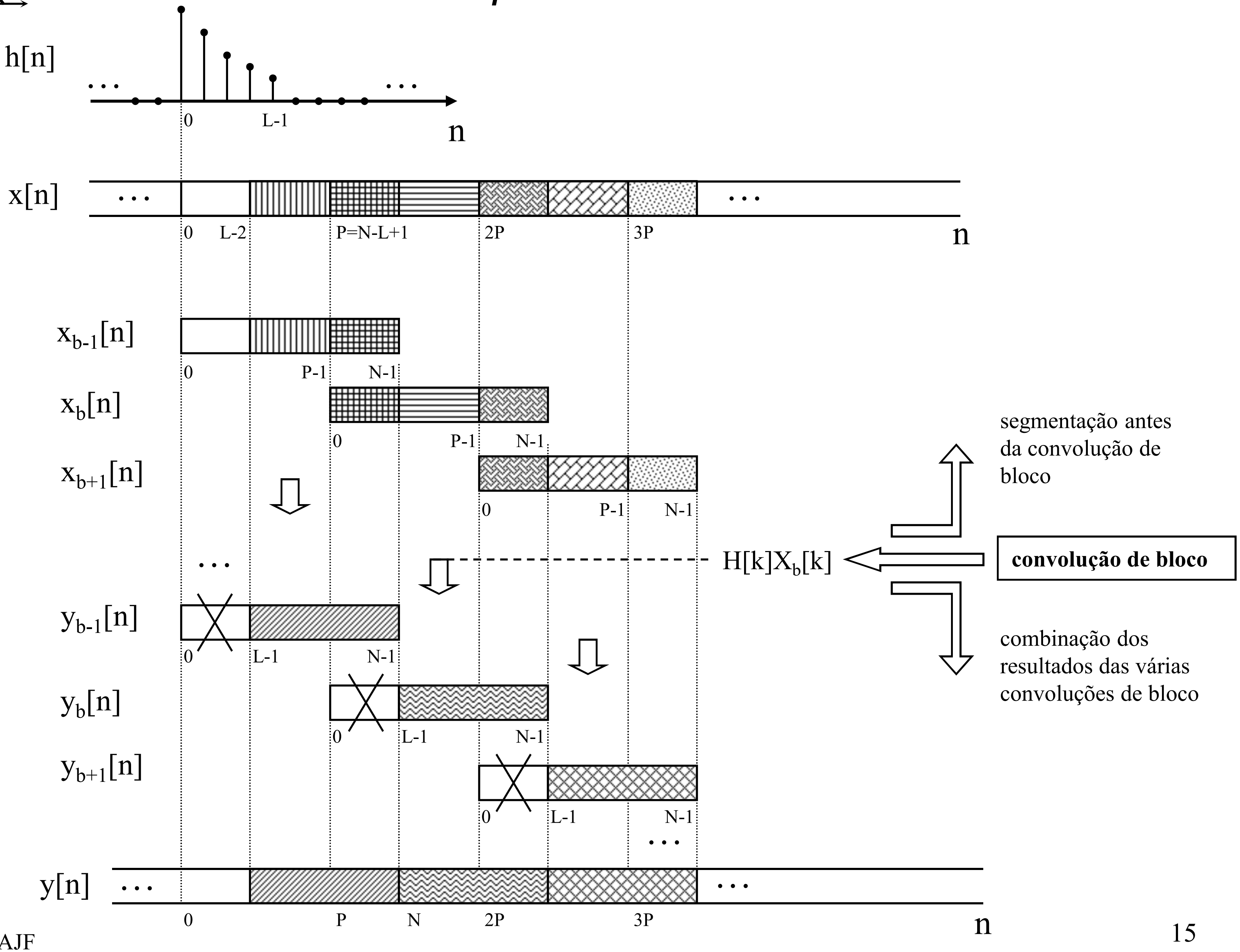
- Algoritmo de *overlap-save*

  – este algoritmo difere do anterior no sentido em que, em vez de efectuar a convolução circular de modo a não haver termos de *aliasing* para além do resultado da convolução linear (e para isso era necessário garantir que $N \geq L+P-1$) aqui <u>permite-se o aparecimento de *aliasing*</u> mas cuja posição no sinal resultante de cada convolução de bloco está bem definida e por isso esse <u>*aliasing* é descartado</u> na construção do sinal y[n],

  – concretamente, mostra-se [Oppenheim, secção 8.7.2] que efectuando a convolução circular em N pontos entre um sinal com L amostras não nulas (com $L<N$) e um outro sinal com N amostras não nulas, resulta que as primeiras L-1 amostras da convolução circular contêm termos de *aliasing* para além do termo correspondente à convolução linear, mas que as restantes **P=N-L+1** amostras correspondem exatamente, e só, ao resultado pretendido da convolução linear.

© AJF

Overlap-Save com N=L+P-1



© AJF

Realização da Convolução Linear usando DFTs

- Particularidades do algoritmo *overlap-save*
  - os blocos de comprimento N (e parcialmente sobrepostos em L-1 amostras) são directamente extraídos do sinal x[n] sem *zero-padding*:

$$x_b[n] = \begin{cases} x[n + b(N-L+1)], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & outros \quad n \end{cases}$$

o que significa que, ao tomar um bloco de N amostras, é necessário guardar as últimas L-1 amostras para utilização do bloco seguinte ("overlap-and-save"),

  - NOTA: aqui não se verifica a seguinte relação: $x[n] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} x_b[n - b(N-L+1)]$

  - após a convolução circular de h[n] com $x_b[n]$, obtém-se um resultado ao qual devem ser retiradas as primeiras L-1 amostras por conterem *aliasing*, sendo a saída útil da convolução de bloco dada por:

$$y_{bu}[n] = \begin{cases} y_b[n], & L-1 \le n \le N-1 \\ 0, & outros \quad n \end{cases}$$

  - dado que os vários blocos $y_{bu}[n]$ não se sobrepõem em n, a saída é formada justapondo-os simplesmente: $y[n] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} y_{bu}[n - b(N-L+1)]$
  - se o sinal x[n] tiver um comprimento total que seja um inteiro múltiplo de N-L+1 amostras, então, para obter o resultado final desejado, é suficiente efectuar esse número inteiro de convoluções de bloco, mais um.

© AJF